Hertentamen 2 Fouriertheorie, 18-08-04, 09.00–12.00 uur

Alle te gebruiken formules met betrekking tot Fourierreeksen en Fourierintegralen worden in de text van dit tentamen vermeld. Gebruik alleen deze formules!

1. Definieer de functies $f_n(x) = n^2 x^n (1-x)$, $0 \le x \le 1$.
   (a) Bereken $\int_0^1 f_n(x)\,dx$.
   (b) Bepaal $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$.
   (c) Bepaal $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $0 \le x \le 1$.
   (d) Is de convergentie in (c) uniform, monotoon, of gedomineerd?

2. Toon aan dat de integraal $\int_0^\infty e^{-xy} \sin y\,dy$ uniform convergeert voor $x \ge a$ voor elke $a > 0$.

3. Voor $0 \le s \le \pi$ definieer de functie $f(t)$, $0 \le t \le \pi$, door
$$f(t) = (\pi - s)t, \quad 0 \le t \le s, \quad f(t) = (\pi - t)s, \quad 0 < s \le t.$$
   (a) Geef de Fourier sinus ontwikkeling van deze functie.
   (b) Convergeert deze reeks uniform?
   (c) Geef de bijbehorende Parseval identiteit.

   Aanwijzing: gebruik $f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^\infty a_n \cos nx + \sum_{n=1}^\infty b_n \sin nx$ met $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt$, $n \in \mathbb{N}$.

4. Laat zien met behulp van de Fouriertransformatie $\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} f(t)\,dt$, $f \in L^1(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$, dat de inhomogene differentiaalvergelijking
$$y'' - y = f, \quad f \in L^1(\mathbb{R}),$$
   met $y \in L^1(\mathbb{R})$, $y' \in L^1(\mathbb{R})$, $y'' \in L^1(\mathbb{R})$, $\lim_{|x|\to\infty} y(x) = 0$, en $\lim_{|x|\to\infty} y'(x) = 0$, een oplossing heeft van de vorm
$$y(t) = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-|t-s|} f(s)\,ds.$$
   Aanwijzing: bereken de Fouriertransformatie van $e^{-|t|}$.